Problemario 1 - MA2222
septiembre-diciembre 2016
Espacios y subespacios vectoriales I

Ej. 1) Demostrar el siguiente

Teorema 1 *Si* $\mathbb{V}$ *es un espacio vectorial sobre un cuerpo* $\mathbb{F}$*, entonces para todo par de vectores* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *en* $\mathbb{V}$ *y todo par de escalares* α, β *en* $\mathbb{F}$*:*

a*)* $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$

b*)* $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$

c*)* $(-\alpha)\mathbf{x} = -(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(-\mathbf{x})$

d*)* $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0$ *ó* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

e*)* $\alpha\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ *y* $\alpha \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$

f*)* $\alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{x} \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

g*)* $-(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (-\mathbf{x}) + (-\mathbf{y}) = -\mathbf{x} - \mathbf{y}$

h*)* $\sum_{j=1}^{k} \mathbf{x} = k\mathbf{x}$ *para todo número natural* $k \geq 1$*.*

Ej. 2) Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$, demuestre la unicidad del neutro $\mathbf{0}$ de la suma de vectores.

Ej. 3) Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ demuestre que el inverso aditivo $-\mathbf{x}$ de $\mathbf{x}$ es único.

Ej. 4) Demuestre detalladamente que dado un conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n\}$ de n vectores en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, la suma $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \dots + \mathbf{x}_n$ está bien definida.

Ej. 5) Dado un conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n\}$ de n vectores en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, demuestre que para cualquier permutación $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_{\sigma(j)}$$

(es decir: demuestre que la suma de los n vectores siempre da el mismo resultado sin importar el orden el que se efectúe).

Ej. 6) Sean a y b dos números reales. Se definen las operaciones:

a) $(x_0, y_0) + (x_1, y_1) = (x_0 + x_1 - a, y_0 + y_1 - b)$ entre elementos de $\mathbb{R}^2$.

b) $\alpha(x, y) = (\alpha(x - a) + a, \alpha(y - b) + b)$ entre escalares y elementos de $\mathbb{R}^2$.

Demuestre que $\mathbb{R}^2$ con estas operaciones es un espacio vectorial sobre los reales o, en caso de no serlo, diga cuál (o cuales) axioma de espacio vectorial no se satisface.

Ej. 7) Demuestre detalladamente

Teorema 2 *Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial y $\mathbb{W}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{V}$ entonces $\mathbb{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si, y sólo si, para todo par $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de elementos de $\mathbb{W}$ y todo escalar α la suma $\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es un elemento de $\mathbb{W}$.*

Ej. 8) Demuestre en cada caso que $\mathbb{W}$ NO es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$:

a) $\mathbb{W} = \{(a, b, c,) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \geq 0\}$

b) $\mathbb{W} = \{(a, b, c,) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$

Ej. 9) *En el espacio vectorial* $\mathbb{Z}_5^3$ exprese el vector $\mathbf{x} = (2, 1, 4)$ como combinación lineal de $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{x}_3 = (0, 1, 1)$.

Ej. 10) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ escriba el vector $\mathbf{v} = (2, -5, 3)$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, -3, 2), \mathbf{v}_2 = (2, -4, -1)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, -5, 7)$.

Ej. 11) En el espacio vectorial $\mathbb{P}$ escriba el vector $p(x) = x^2 + 4x - 3$ como combinación lineal de $p_1(x) = x`2 - 2x + 5, p_2(x) = 2x^2 - 3x$ y $p_3(x) = x + 1$.

Ej. 12) Se tienen dos bases ordenadas de $\mathbb{P}_2$, el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado a lo sumo 2:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{x + x^2, 1 + x, 1 + x^2\right\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \left\{x^2 + x - 1, 1 + 2x^2, 3 + x\right\}$$

Halle la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ es decir, la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para todo vector $vx \in \mathbb{P}_2$:

$$A(\mathbf{x})_{\mathcal{B}_1} = (\mathbf{x})_{\mathcal{B}_2}$$

Ej. 13) Demuestre que la equivalencia por filas es de hecho una relación de equivalencia.

Ej. 14) Demuestre que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada reducida por filas.

Ej. 15) Demuestre que si A y B son dos matrices en $\mathbb{R}^{m\times n}$ equivalentes por filas, entonces necesariamente tienen el mismo espacio de filas.

Ej. 16) Halle una base para el espacio de filas de la matriz $A \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$